Opracowanie pomiarów dynamicznych ADC

Jakub Moroń
jmoron@agh.edu.pl

3 czerwca 2015

Spis treści

1 Obliczenie dyskretnej transformaty Fouriera

W czasie pojedynczego pomiaru dynamicznego zostało zebrane N próbek sinusa o częstotliwości f_{sig} przy częstotliwości próbkowania f_{s}. Plik wynikowy zawiera jedynie kolumnę kodów (wyników konwersji) odpowiadających wartościom sinusa wejściowego w kolejnych chwilach czasowych (odległych oczywiście o $T_{\mathrm{s}} = \frac{1}{f_{\mathrm{s}}}$) . Każdej z próbek można przypisać indeks n przebiegający zakres $(0, N-1)$.

Ciągowi N próbek $x(n)$ w dziedzinie czasu odpowiada N-elementowy ciąg $x(m)$ w dziedzinie częstotliwości. Oba ciągi są jednoznacznie powiązane dyskretną transformatą Fouriera:

$$x(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{\frac{-j2\pi nm}{N}} \tag{1}$$

gdzie $m \in (0, N-1)$.

Wyznaczenie widma sygnału wejściowego polega więc na obliczeniu N sum danych wzorem (1) dla kolejno rosnącego indeksu m. Możliwe jest oczywiście zastosowanie np. algorytmu FFT (Fast Fourier Transform) dla zmniejszenia ilości operacji. W wyniku obliczeń otrzymujemy ciąg wartości w dziedzinie częstotliwości $x(m)$, zwanych prążkami, numerowany indeksem m. Powiązanie tego indeksu z częstotliwością jest możliwe jedynie przy znajomości częstotliwości próbkowania f_{s}. Częstotliwość podstawowa transformaty jest bowiem wyrażona jako

$$f_{\mathrm{b}} = \frac{f_{\mathrm{s}}}{N} \tag{2}$$

zaś kolejne prążki odpowiadają całkowitym wielokrotnościom częstotliwości podstawowej f_{b}. Częstotliwości te są nazywane częstotliwościami bazowymi transformaty.

$$f(m) = m f_{\mathrm{b}} \tag{3}$$

Należy przy tym zwrócić uwagę że dla $m = 0$ otrzymujemy prążek odpowiadający częstotliwości bazowej $f(0) = 0$, a więc zawierający informację o składowej stałej sygnału. Prążek ten pomijamy przy obliczeniu metryk dynamicznych ADC.

Wynikiem dyskretnej transformaty Fouriera (1) jest zbiór $x(m)$ liczb zespolonych. Interesującą nas informacją jest amplituda sygnału, stąd kolejnym krokiem jest obliczenie modułów $\overline{X}(m)$ prążków $x(m)$

$$\overline{X}(m) = |x(m)| \qquad m \in (0, N-1) \tag{4}$$

Można udowodnić że dla sygnału sinusoidalnego o amplitudzie A i częstotliwości będącej dowolną częstotliwością bazową $f(m)$ transformaty amplituda $\overline{X}(m)$ odpowiadającego mu prążka będzie miała wartość $A\frac{N}{2}$. Kolejnym krokiem jest więc normalizacja otrzymanego widma

$$X(m) = \overline{X}(m)\frac{2}{N} \qquad m \in (0, N-1) \tag{5}$$

Kolejnym możliwym krokiem jest noramlizacja widma do wartości prążka odpowiadającego sygnałowi wejściowemu f_{sig}. Jego wartość zależy od aplitudy sinusa wejściowego i wzmocnienia ADC (w badabym układzie przy amplitudzie sinusa 3.3V amplituda tego prążka powinna wynosić około 40dB). Normalizacja polega na podzieleniu całego widma przez amplitudę prążka sygnału wejściowego, jednakże nie jest jednoznacznie określona dla sygnałów o częstotliwości nie będącej częstotliwością bazową transformaty. Ponieważ normalizacja zmienia jedynie położenie zera na skali amplitudy wykresu widma zalecane jest jej pominięcie w tym opracowaniu.

Ponieważ sygnał wejściowy ma charakter rzeczywisty (składowa urojona jest równa zeru) prążki o indeksie $m \geq \frac{N}{2}$ mają charakter nadmiarowy. Inaczej mówiąc prążek o indeksie $m = \frac{N}{2}$ będzie odpowiadał częstotliwości wejściowej równej

$$f\left(\frac{N}{2}\right) = \frac{N}{2}f_{\mathrm{b}} = \frac{N}{2}\frac{f_{\mathrm{s}}}{N} = \frac{f_{\mathrm{s}}}{2} \tag{6}$$

czyli niespełniającej warunku Kotielnikowa-Shannona (Nyquista). Amplituda każdego prążka o indeksie $m \in (\frac{N}{2}, N-1)$ będzie równa amplitudzie prążka o indeksie $N - m$ (zaś faza będzie przeciwna i równa co do wartości bezwzględnej). Stąd też interesujący z punktu widzenia metryk dynamicznych zakres widma zawiera się w przedziale $m \in (1, \frac{N}{2} - 1)$.

2 Wyznaczenie częstotliwości harmonicznych sygnału wejściowego

Nieliniowości wprowadzane przez przetwornik analogowo-cyfrowy objawiają się na jego wyjściu pod postacią zniekształceń harmonicznych (czyli kolejnych całkowitych wielokrotności częstotliwości sygnału f_{sig}). Oprócz tego za degradację sygnału wyjściowego odpowiedzialny jest szum, zarówno kwantyzacji jak i rzeczywisty, wprowadzany przez obwody analogowe przetwornika. Informacja o poziomie szumu jest zawarta w prążkach nie będących harmonicznymi sygnału wejściowego. W celu obliczenia metryk dynamicznych należy więc wpierw wyznaczyć prążki odpowiadające kolejnym harmonicznym częstotliwości sygnału wejściowego f_{sig}. W ciągłej dziedzinie czasu (przed kwantyzacją dokonywaną przez przetwornik) k-ta częstotliwość harmoniczna $\widehat{f_{\mathrm{h[k]}}}$ sygnału wejściowego o częstotliwości f_{sig} jest oczywiście równa

$$\widehat{f_{\mathrm{h[k]}}} = k \cdot f_{\mathrm{sig}} \qquad k \in (1, \infty) \tag{7}$$

Należy zauważyć, że dla dowolnej częstotliwości wejściowej f_{sig} odpowiednio wysoka częstotliwość harmoniczna $\widehat{f_{\mathrm{h[k]}}}$ nie spełni warunku warunku Kotielnikowa-Shannona (Nyquista), czyli nie będzie spełniona nierówność

$$\widehat{f_{\mathrm{h[k]}}} < \frac{f_{\mathrm{s}}}{2} \tag{8}$$

Takie harmoniczne będą podlegać zjawisku aliasingu, czyli przesunięciu o całkowitą wielokrotność częstotliwości próbkowania f_{s} i odtworzone jako sygnał o częstotliwości danej zależnością

$$f_{\mathrm{h[k]}} = \left| c f_{\mathrm{s}} - \widehat{f_{\mathrm{h[k]}}} \right| \tag{9}$$

gdzie c jest dowolną liczbą naturalną dobraną tak, by wartość cf_{s} była jak najbliższa $\widehat{f_{\mathrm{h[k]}}}$. W praktyce częstotliwości harmoniczne wyznacza się poprzez wyznaczenie odpowiadających im indeksów prążków $m_{\mathrm{h[k]}}$ zgodnie z procedurą opisaną poniżej.

Zgodnie z przyjętym standardem wyznaczania metryk dynamicznych dla przetworników do obliczeń przyjmujemy $N_{\mathrm{h}} = 10$ pierwszych częstotliwości harmonicznych, czyli ograniczamy zakres zmienności indeksu k do $(1, N_{\mathrm{h}})$. Indeks m_{sig} prążka odpowiadającego częstotliwości sygnału wejściowego f_{sig} znajdujemy ze związku (3)

$$m_{\mathrm{sig}} = \frac{f_{\mathrm{sig}}}{f_{\mathrm{b}}} \equiv m_{\mathrm{h[1]}} \tag{10}$$

Następnie dla każdej harmonicznej (każdego indeksu k) wykonujemy dzielenie modulo (czyli wyznaczenie reszty z dzielenia całkowitego)

$$\overline{m_{\mathrm{h[k]}}} = \frac{(k f_{\mathrm{sig}}) \mathrm{mod}(f_{\mathrm{s}})}{f_{\mathrm{b}}} = (k m_{\mathrm{sig}}) \mathrm{mod}(N) \qquad k \in (1, N_{\mathrm{h}}) \tag{11}$$

Jak wspomniano wyżej interesujący nas zakres widma zawiera się w przedziale $m \in (1, \frac{N}{2} - 1)$, zaś wynik dzielenia modulo w przedziale $m \in (1, N - 1)$, należy więc przenieść harmoniczne o indeksie $\overline{m_{\mathrm{h[k]}}} \geq \frac{N}{2}$ na przedział $(1, \frac{N}{2} - 1)$ otrzymując

$$m_{\mathrm{h[k]}} = \begin{cases} \overline{m_{\mathrm{h[k]}}} \ \text{dla}\ \overline{m_{\mathrm{h[k]}}} < \frac{N}{2} \\ (N - \overline{m_{\mathrm{h[k]}}}) \ \text{dla}\ \overline{m_{\mathrm{h[k]}}} \geq \frac{N}{2} \end{cases} \quad k \in (1, N_{\mathrm{h}}) \tag{12}$$

3 Obliczanie metryk dynamicznych ADC

Pierwsza z metryk opisuje degradację sygnału wprowadzaną przez zniekształcenia harmoniczne i jest nazywana całkowitymi zniekształceniami harmonicznymi THD (Total Harmonic Distorsion). Jest to stosunek mocy niesionej przez N_{h} pierwszych harmonicznych do mocy sygnału definiowany jako

$$\mathrm{THD} = 20 \log_{10} \sqrt{\frac{\sum_{k=2}^{N_{\mathrm{h}}} X^2(m_{\mathrm{h[k]}})}{X^2(m_{\mathrm{sig}})}} \quad [dB] \tag{13}$$

Stosunek sygnału do szumu nie będącego częstotliwości harmonicznymi wyraża metryka SNHR (Signal to Non-Harmonic Ratio). Jest definiowana jako

$$\mathrm{SNHR} = 20 \log_{10} \sqrt{\frac{X^2(m_{\mathrm{sig}})}{\sum_{\substack{m=1, \\ m \neq m_{\mathrm{h[k]}}}}^{\frac{N}{2}-1} X^2(m)}} \quad [dB] \tag{14}$$

gdzie zapis

$$\sum_{\substack{m=1, \\ m \neq m_{\mathrm{h[k]}}}}^{\frac{N}{2}-1} X^2(m) \tag{15}$$

należy rozumieć jako sumę po całym przedziale widma z wyłączeniem częstotliwości harmonicznych (oraz oczywiście sygnału wejściowego odpowiadającego harmonicznej $k = 1$).

Zakres wolny od zniekształceń SFDR (Spurious Free Dynamic Range) informuje o odstępie sygnału do największego z zakłóceń (niezależnie czy jest to szum czy częstotliwość harmoniczna). Definiuje się go jako

$$\mathrm{SFDR} = 20\log_{10}\sqrt{\frac{X^2(m_{\mathrm{sig}})}{\max\limits_{\substack{m=1,\\ m\neq m_{\mathrm{sig}}}}^{\frac{N}{2}-1} X^2(m)}} \quad [dB] \tag{16}$$

gdzie wyrażenie w mianowniku oznacza maksymalną amplitudę z przedziału $m \in (1, \frac{N}{2}-1)$ z pominięciem częstotliwości wejściowej f_{sig} podniesioną do kwadratu.

Ostatnią metryką określającą całkowitą jakość pracy przetwornika jest stosunek sygnału do szumu i zniekształceń SINAD (Signal to Noise And Distorsion). Jest definiowany jako stosunek mocy sygnału do całkowitej mocy szumów i zniekształceń

$$\mathrm{SINAD} = 20\log_{10}\sqrt{\frac{X^2(m_{\mathrm{sig}})}{\sum\limits_{\substack{m=1,\\ m\neq m_{\mathrm{sig}}}}^{\frac{N}{2}-1} X^2(m)}} \quad [dB] \tag{17}$$

Na tej podstawie można wyznaczyć efektywną liczbę bitów przetwornika ENOB (Effective Number Of Bits) jako

$$\mathrm{ENOB} = \frac{\mathrm{SINAD} - 1.76}{6.02} \quad [bits] \tag{18}$$